SUMA 2019

Reunión Anual UMA-SOMACHI

XXXI Encuentro de Estudiantes de Matemática

Aproximación de Funciones

Dr. Fabián E. Levis

24 al 27 de Septiembre de 2019

Mendoza, Argentina

Índice general

1

Mejor Aproximación en Espacios Normados

1.1. Introducción y Notación

El problema de la mejor aproximación de una función consiste en encontrar una función perteneciente a una familia fija de tal manera que su desviación de la función dada es un mínimo. Este problema fue formulado primero por Chebyshev en el siglo XIX, que investigó la aproximación de funciones continuas por polinomios algebraicos de grado fijo, tomando como medida de desviación el máximo del valor absoluto de su diferencia. Posteriormente, muchos matemáticos tales como Markov, Bernstein, Haar, y Kolmogorov, han estudiado otros problemas cambiando la medida de desviación y la familia utilizada para la aproximación.

Con el desarrollo de la teoría de los espacios normados se hizo evidente que una amplia gama de problemas se pueden poner en una formulación general de espacios normados, si la norma del espacio se toma como medida de desviación.

El objetivo del capítulo es introducir ciertos hechos generales básicos de la teoría de aproximación en espacios normados. Los temas que tocaremos son los clásicos problemas de la teoría de aproximación: existencia, unicidad, caracterización y continuidad del operador de mejor aproximación.

Primero fijemos alguna notación. En este capítulo, X siempre denotará un espacio normado sobre $\mathbb{R}$, es decir, X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ en el que se puede definir una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, llamada norma, que verifica:

(a) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$;

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$;

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Ejemplo 1.1.1. ***Ejemplos de Espacios Normados***

(a) $\mathbb{R}^n$ *con la norma* $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, *y* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

(b) El espacio l^p, $1 \leq p < \infty$, *de las sucesiones de números reales* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ *con la norma* $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;

(c) El espacio l^∞ *de las sucesiones de números reales acotadas* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con la norma* $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$;

(d) El espacio c_0 *de las sucesiones de números reales* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, *con la norma* $\|x\|_\infty$;

(e) El espacio l^1 *con la norma* $\|x\|_0 = \|x\|_1 + \|x\|_2$, *donde* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

(f) El espacio $C[0,1]$ *de todas las funciones reales continuas definidas sobre el* $[0,1]$ *con la norma* $\|g\|_* = \max_{x\in[0,1]} |g(x)| + \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, $g \in C[0,1]$.

Nuestro problema es aproximar elementos $f \in X$ desde elementos de $S \subset X$. El error en este problema se denota por

$$E(f,S) = \inf\{\|f - s\| : s \in S\}.$$

El subconjunto $S \subset X$ se dice de existencia para X, si para cada $f \in X$ existe un $s_0 \in S$ tal que

$$\|f - s_0\| \leq \|f - s\|,$$

para todo $s \in S$, es decir $E(f,S) = \|f - s_0\|$. Un tal s_0 es llamado un mejor aproximante a f desde S.

1.2. Existencia del Mejor Aproximante

En esta sección se muestran algunos resultados elementales sobre la existencia de mejores aproximantes.

El siguiente teorema garantiza la existencia del mejor aproximante a un elemento f de un espacio normado cuando el subconjunto desde el que se aproxima es compacto.

Teorema 1.2.1. *Sean* X *un espacio normado,* $S \subset X$ *un subconjunto compacto y* $f \in X$*. Entonces existe un mejor aproximante a* f *desde* S*.*

Demostración. Sea $E = E(f,S)$. Por definición de E, existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = E.$$

Puesto que S es compacto, existe una subsucesión de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $s^* \in S$. Si se denota con $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a tal subsucesión, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \|s_{n_k} - s^*\| = 0.$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f - s^*\| \leq \|f - s_{n_k}\| + \|s_{n_k} - s^*\|.$$

Luego, haciendo tender $k \to \infty$, el primer término de la derecha se aproxima a E, mientras que el segundo término tiende a cero. Así se logra,

$$\|f - s^*\| \leq \lim_{k \to \infty} (\|f - s_{n_k}\| + \|s_{n_k} - s^*\|) = E.$$

Sin embargo, debido a que $s^* \in S$, $\|f - s^*\| \geq \inf_{s \in S} \|f - s\| = E$.
Entonces $\|f - s^*\| = E$ y s^* es un mejor aproximante a f desde S. $\square$

El siguiente resultado permite observar que no es necesario, para probar existencia, que el subconjunto S desde el cual se aproxima a un elemento f sea compacto.

Teorema 1.2.2. *Sean X un espacio normado, $S \subset X$ un subespacio de dimensión finita. Entonces, para cada $f \in X$, existe un mejor aproximante a f desde S.*

Demostración. Sean $s_0 \in S$, $M = \|f - s_0\|$ y $N = \|f\|$. Se define

$$A := \{s \in S : \; \|f - s\| \leq M\}.$$

Para cada $s \in A$, se tiene

$$\|s\| \leq \|f - s\| + \|f\| \leq M + N,$$

por lo tanto A es un subconjunto acotado de S.
Veamos que A es cerrado. Sean $d \in X$ y $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión formada por elementos de A tal que $\lim_{n \to \infty} \|s_n - d\| = 0$. Como S es un subespacio de dimensión finita, entonces S es cerrado y por ende $d \in S$. Por otra parte, dado que $s_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $||f - s_n|| \leq M$. Así,

$$\|f - d\| \leq \|f - s_n\| + \|s_n - d\| \leq M + \|s_n - d\|.$$

De esto se deduce que,

$$||f - d|| \leq M + \lim_{n\to\infty} ||s_n - d|| \leq M,$$

y así $d \in A$. Por lo tanto A es un subconjunto cerrado de S.

Puesto que cualquier subconjunto cerrado y acotado de un subespacio de dimensión finita es compacto, del Teorema 1.2.1, existe $s^* \in A$ tal que

$$\|f - s^*\| \leq \|f - s\| \leq M \quad \text{para todo} \quad s \in A.$$

Además, si $s \in S \setminus A$ se tiene que $\|f - s\| > M \geq \|f - s^*\|$.

Entonces,

$$\|f - s^*\| \leq \|f - s\| \quad \text{para todo} \quad s \in S.$$

O sea, s^* es un mejor aproximante a f desde S. □

1.3. Caracterización del Mejor Aproximante

En esta sección se presenta un teorema de caracterización de un mejor aproximante en espacios normados, en cual utiliza la idea de derivada direccional de la norma.

A continuación se introduce la definición de la derivada de Gateaux y alguna notación.

Definición 1.3.1. *Sean $f, h \in X$. Si existe*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f + th\| - \|f\|}{t},$$

entonces el límite se llama la derivada de Gateaux de f en la dirección h y la denotamos $\gamma(f, h)$.

Proposición 1.3.2. *Sean $f, h \in X$. Entonces la función $r : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $r(t) = \frac{\|f+th\|-\|f\|}{t}$ es no decreciente y acotada inferiormente.*

Demostración. En primer lugar se prueba que $r(t)$ es acotada inferiormente. En efecto, por la desigualdad triangular se tiene

$$\|f + th\| \geq \|f\| - \|th\| = \|f\| - t\|h\|.$$

Así, para todo $t > 0$, $r(t) = \frac{\|(f+th\| - \|f\|}{t} \geq -\|h\|$.

A continuación se prueba que $r(t)$ es no decreciente para $t \in (0, \infty)$.

Sea $0 < u < t < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} t\|f + uh\| &= \|tf + tuh\| \\ &= \|u(f + th) + (t - u)f\| \\ &\leq u\|(f + th)\| + (t - u)\|f\| \\ &= u\left(\|(f + th)\| - \|f\|\right) + t\|f\| \end{aligned}$$

En consecuencia, $r(u) = \frac{\|f+uh\| - \|f\|}{u} \leq \frac{\|(f+th\| - \|f\|}{t} = r(t)$. $\square$

Observación 1.3.3. *Por la Proposición 1.3.2, existe* $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\|f+th\| - \|f\|}{t}$.

Definición 1.3.4. *Para* $f, h \in X$*, denotamos por*

$$\gamma_+(f, h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|f + th\| - \|f\|}{t}$$

la derivada lateral de Gateaux a derecha de f *en la dirección* h*.*

Observación 1.3.5. *Para cada* $f, g, h \in X$ *se satisface:*

(a) $\gamma_+(f, \alpha g) = \alpha\gamma_+(f, g)$*, para todo* $\alpha \geq 0$*;*

(b) $\gamma_+(f, g + h) \leq \gamma_+(f, g) + \gamma_+(f, h)$*.*

Ejemplo 1.3.6. *(1) Sea $C[a,b]$ el conjunto de todas las funciones reales continuas definidas sobre el $[a,b]$. Tomemos en $C[a,b]$ la norma Chebyshev o infinito $\|g\|_\infty := \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$, $g \in C[a,b]$. Para $f, h \in C[a,b]$, $f \neq 0$, se tiene:*
$\gamma_+(f,h) = \max\{h(x)sgn(f(x)) :\ x \in [a,b],\ |f(x)| = \|f\|_\infty\}$.

(2) Sean Ω un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos sobre Ω y μ una medida positiva sobre Σ. Sean $1 \leq p < \infty$ y $L_p(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones reales medibles definidas sobre Ω tal que $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$. Tomemos en $L_p(\Omega)$ la norma $\|g\|_p = \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $g \in X$. Para $f, h \in L_p(\Omega)$, $f \neq 0$, se tiene:

(a) $\gamma_+(f,h) = \int\limits_\Omega sgn(f)hd\mu + \int\limits_{f=0} |h(x)|d\mu$, si $p = 1$;

(b) $\gamma_+(f,h) = \frac{1}{\|f\|^{p-1}} \int\limits_\Omega |f|^{p-1} sgn(f)hd\mu$, si $1 < p < \infty$.

Además en cualquier caso, $\gamma_+(0,h) = \|h\|_p$.

A continuación se prueba un teorema de caracterización.

Teorema 1.3.7. *Sean X un espacio normado, $S \subset X$ un subespacio y $f \in X$. Entonces s^* es un mejor aproximante a f desde S si y sólo si $\gamma_+(f - s^*, s) \geq 0$, para todo $s \in S$.*

Demostración. Se asume que s^* es un mejor aproximante a f desde S y sean $s \in S$ y $t > 0$. Puesto que S es un subespacio $s^* - ts \in S$, así

$$\|f - s^* + ts\| \geq \|f - s^*\|,$$

y por lo tanto, $\frac{\|f-s^*+ts\|-\|f-s^*\|}{t} \geq 0$. De la arbitrariedad de t y s se logra que $\gamma_+(f - s^*, s) \geq 0$ para todo $s \in S$.

Recíprocamente, se supone que $\gamma_+(f - s^*, s) \geq 0$, para todo $s \in S$. Sea $s \in S$, entonces $\gamma_+(f - s^*, s^* - s) \geq 0$, pues $s^* - s \in S$.

Por Proposición 1.3.2, $r(t) = \frac{\|f-s^*+t(s^*-s)\|-\|f-s^*\|}{t}$ es no decreciente para $t > 0$. Tomando

$t = 1$, se consigue

$$\|f - s\| - \|f - s^*\| = \frac{\|f - s^* + 1(s^* - s)\| - \|f - s^*\|}{1} \geq \gamma_+(f - s^*, s^* - s) \geq 0.$$

Así, se concluye $\|f - s\| \geq \|f - s^*\|$ para todo $s \in S$. Luego, s^* es un mejor aproximante a f desde S. □

1.4. Unicidad del Mejor Aproximante

En esta sección se dan a conocer algunos resultados de unicidad del mejor aproximante a un elemento del espacio.

Sea S un subconjunto de X. Para cada $f \in X$ se define

$$P_S(f) := \{s^* : s^* \in S, \ ||f - s^*|| = E(f, S)\}.$$

$P_S(f)$ es un subconjunto de S formado por todos los mejores aproximantes a f desde S, si este es no vacío. A la aplicación $P_S : X \to 2^X$ se la llama proyección métrica de S.

El siguiente resultado, muestra que la convexidad es una propiedad geométrica que la proyección métrica P_S hereda directamente de S.

Proposición 1.4.1. *Sean X un espacio normado, $S \subset X$ un subconjunto convexo y $f \in X$. Si $s^*, \overline{s} \in S$ son mejores aproximantes a f por elementos de S, entonces para cada $\lambda \in [0, 1]$ el elemento $\lambda s^* + (1 - \lambda)\overline{s}$, es también un mejor aproximante a f.*

Demostración. Sea $E = E(f, S)$ y $s^*, \overline{s} \in P_S(f)$, entonces

$$\|f - s^*\| = \|f - \overline{s}\| = E.$$

Para cada $\lambda \in [0, 1]$, se denota $s(\lambda) := \lambda s^* + (1 - \lambda)\overline{s}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|f - s(\lambda)\| &= ||\lambda f + (1 - \lambda)f - [\lambda s^* + (1 - \lambda)\overline{s}]|| \\ &\leq ||\lambda f - \lambda s^*|| + ||(1 - \lambda)f - (1 - \lambda)\overline{s}|| \\ &= \lambda\|f - s^*\| + (1 - \lambda)\|f - \overline{s}\| = E.\end{aligned}$$

Puesto que S es convexo, $s(\lambda) \in S$ y por lo tanto $\|f - s(\lambda)\| \geq E$. Así, $\|f - s(\lambda)\| = E$. Luego, por definición $s(\lambda)$ es un mejor aproximante a f desde S. □

$P_S(f)$ puede ser un conjunto vacío, tener un único elemento de S o, como se ha visto en la proposición previa, ser un subconjunto convexo de S conteniendo más de un elemento.

En algunos casos, propiedades simples sobre la norma permiten eliminar la tercera opción, es decir, propiedades que garantizan que $P_S(f)$ contendrá como máximo un elemento.

Recordemos la definición de espacios estríctamente convexos.

Definición 1.4.2. *Un espacio normado X se dice que es estríctamente convexo si se verifica la siguiente condición: Si $f, g \in X$ y $\|f\| + \|g\| = \|f + g\|$ con $g \neq 0$ entonces existe $t > 0$ tal que $f = tg$.*

Ejemplo 1.4.3. *(a) $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$, $1 < p < \infty$, es estríctamente convexo;*

(b) l^p, $1 < p < \infty$, con la norma $\|\cdot\|_p$ es estríctamente convexo;

(c) $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, con la norma $\|\cdot\|_p$ es estríctamente convexo;

(d) $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_1$ no es estríctamente convexo;

(e) c_0 con la norma $\|\cdot\|_\infty$ no es estríctamente convexo;

(f) l^1 con la norma $\|\cdot\|_1$ no es estrictamente convexo;

(g) l^∞ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ no es estríctamente convexo.

La siguiente proposición (ver [1]) es un resultado de caracterización de espacios estríctamente convexos.

Proposición 1.4.4. *Sea X un espacio normado X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *X es estríctamente convexo;*

(b) *Si $f, g \in X$ y $\|f\| = \|g\| = \left\|\frac{f+g}{2}\right\|$ entonces $f = g$;*

(c) *Si $f, g \in X$, $f \neq g$, y $\|f\| = \|g\| = 1$ entonces $\|\lambda f + (1-\lambda)g\| < 1$, para cada $\lambda \in (0, 1)$.*

Observación 1.4.5. *X es estríctamente convexo si el conjunto $\{f \in X : \|f\| = 1\}$ no contiene ningún segmento.*

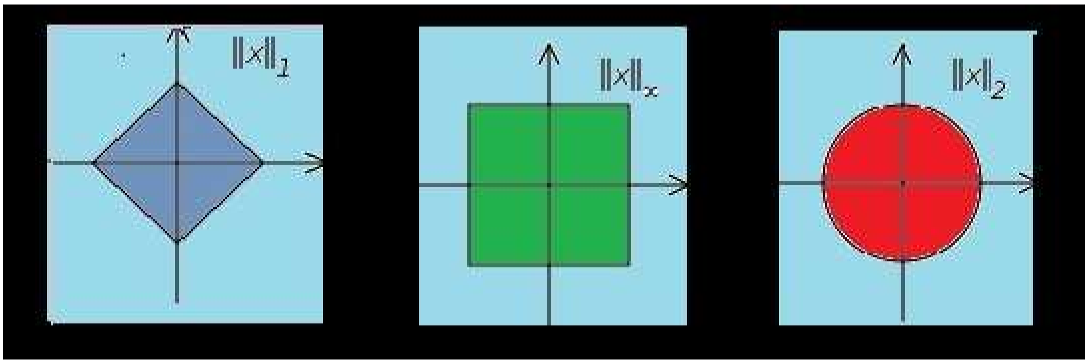

Figura 1.1: Normas no estríctamente convexas y estríctamente convexas

Ahora damos el primer resultado de unicidad.

Teorema 1.4.6. *Sean X un espacio normado estríctamente convexo, $S \subset X$ un subespacio y $f \in X$. Entonces existe a lo sumo un mejor aproximante a f desde S.*

Demostración. Sea $E = E(f, S)$ y $s^*, \overline{s} \in S$ tales que

$$\|f - s^*\| = \|f - \overline{s}\| = E.$$

De la Proposición 1.4.1, se sigue que $\frac{s^*+\overline{s}}{2}$ es un mejor aproximante a f desde S, es decir,

$$\left\| f - \frac{s^* + \overline{s}}{2} \right\| = E.$$

Luego, como X es estríctamente convexo, la Proposición 1.4.4 implica que $f - s^* = f - \overline{s}$. Así, $s^* = \overline{s}$ y por lo tanto el mejor aproximante a f desde S si existe es único. □

A continuación pasamos a definir los espacios uniformemente convexos.

Definición 1.4.7. *Un espacio normado X se dice que es uniformemente convexo, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo los $f, g \in X$ tales que $\|f\| \leq 1$, $\|g\| \leq 1$ y $\|f + g\| \geq 2 - \delta$ se tiene que $\|f - g\| < \epsilon$.*

Lema 1.4.8. *Un espacio normado X es uniformemente convexo si y sólo si para todo par de sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ con $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| = 1 \quad \textit{implica} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Observación 1.4.9. Sea X un espacio normado. Si X es uniformemente convexo, entonces X es estríctamente convexo.

Ejemplo 1.4.10. *(a) $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, con la norma*

$$\|g\|_p = \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad g \in L^p(\Omega),$$

es uniformemente convexo;

(b) l^1 con la norma $\|\cdot\|_1$ no es uniformemente convexo;

(c) l^∞ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ no es uniformemente convexo;

El siguiente ejemplo nos muestra que existen espacios estríctamente convexos, que no son uniformemente convexos

Ejemplo 1.4.11. *(a) El espacio l^1 con la norma $\|\cdot\|_0$ es estríctamente convexo, pero no es uniformemente convexo;*

(b) El espacio $C[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_*$ es estríctamente convexo, pero no es uniformemente convexo (ver [9]).

El siguiente teorema garantiza existencia y unicidad del mejor aproximante cuando X es un espacio de Banach uniformemente convexo y el subconjunto desde el cual se aproxima es convexo y cerrado.

Teorema 1.4.12. *Sean X un espacio de Banach uniformemente convexo, $S \subset X$ subconjunto convexo y cerrado, y $f \in X$. Entonces existe un único mejor aproximante a f desde S.*

Demostración. Sea $E = E(f,S)$. Por definición de E, existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en S tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\| = E$.
Sea

$$e_n = \|f - s_n\|,$$

entonces $e_n \geq E$ y $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = E$.
Si se considera

$$y_{nm} = \frac{e_n}{e_m + e_n} s_m + \frac{e_m}{e_m + e_n} s_n,$$

entonces y_{nm} es una combinación convexa de s_n y s_m. Como S es convexo, $y_{nm} \in S$ y por ende

$$\|f - y_{nm}\| \geq E.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\frac{f-s_m}{e_m}+\frac{f-s_n}{e_n} &= \frac{e_n(f-s_m)+e_m(f-s_n)}{e_me_n}\\ &= \frac{e_nf+e_mf-e_ns_m-e_ms_n}{e_me_n}\\ &= \frac{(e_m+e_n)f}{e_me_n}-\frac{e_ns_m+e_ms_n}{e_me_n}\\ &= \frac{e_m+e_n}{e_me_n}\left(f-\frac{e_ns_m+e_ms_n}{e_m+e_n}\right)\\ &= \frac{e_m+e_n}{e_me_n}\left(f-\left(\frac{e_n}{e_m+e_n}s_m+\frac{e_m}{e_m+e_n}s_n\right)\right)\\ &= \frac{e_m+e_n}{e_me_n}(f-y_{nm}),\end{aligned}$$

la siguiente desigualdad es válida,

$$\left\|\frac{f-s_m}{e_m}+\frac{f-s_n}{e_n}\right\| \geq \frac{e_m+e_n}{e_me_n}E.$$

Sea $\epsilon>0$. Como X es uniformemente convexo, existe $\delta>0$ tal que si $||h||\leq 1$, $||g||\leq 1$ y $||h+g||\geq 2-\delta$ entonces $||h-g||\leq\epsilon$. Dado que $\lim\limits_{n,m\to\infty}\frac{e_m+e_n}{e_me_n}E=2$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{e_m+e_n}{e_me_n}E\geq 2-\delta$ para todo $n,m>N$. Luego,

$$\left\|\frac{f-s_m}{e_m}-\frac{f-s_n}{e_n}\right\|<\epsilon,$$

para $n,m>N$, o sea la sucesión $\left\{\frac{f-s_n}{e_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y consecuentemente es una sucesión convergente por ser X un espacio de Banach. Como $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=E$, se tiene que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún valor $s^*\in X$. Puesto que S es cerrado, $s^*\in S$. De aqui,

$$E=\lim_{n\to\infty}\|f-s_n\|=\|f-s^*\|,$$

es decir s^* es un mejor aproximante a f desde S.

La unicidad es consecuencia de la Observación 1.4.9 y del Teorema 1.4.6. □

1.5. Continuidad del Operador de Mejor Aproximación

Proposición 1.5.1. *Sea $S \subset X$. Entonces $E(f, S)$ es una función continua de f. En efecto, para cualquier $f, h \in X$, se satisface*

$$|E(f, S) - E(g, S)| \leq \|f - g\|.$$

Demostración. Sin pérdida de la generalidad podemos asumir que $E(f, S) \geq E(g, S)$. Dado $\epsilon > 0$, sea $s \in S$ tal que

$$\|g - s\| \leq E(g, S) + \epsilon.$$

Entonces

$$E(f, S) \leq \|f - s\| \leq \|f - g\| + \|g - s\| \leq \|f - g\| + E(g, S) + \epsilon.$$

Así, para cada $\epsilon > 0$ ser tiene

$$E(f, S) - E(g, S) \leq \|f - g\| + \epsilon,$$

lo cual implica el resultado deseado. □

Como una aplicación importante de la Proposición 1.5.1, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.5.2. *Sean $S \subset X$ y $f, f_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$. Asumimos que $s_n \in P_S(f_n)$, para todo n, y que existe $s \in S$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|s - s_n\| = 0$. Entonces $s \in P_S(f)$.*

Demostración. Por la desigualdad triangular,

$$\|f - s\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - s_n\| + \|s_n - s\|,$$

para todo n. Por hipótesis $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = \lim_{n\to\infty} \|s - s_n\| = 0$. De la Proposición 1.5.1,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - s_n\| = \lim_{n\to\infty} E(f_n, S) = E(f, S).$$

Entonces $\|f - s\| \leq E(f, S)$. Como $s \in S$, se consigue que $s \in P_S(f)$. □

Del Teorema 1.5.2 se deduce el siguiente resultado.

Proposición 1.5.3. *Sea $S \subset X$ un subespacio de dimensión finita. Asumimos que $f, f_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$. Además supongamos que $P_S(f) = \{s\}$. Entonces, para cualquier elección de $s_n \in P_S(f_n)$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \|s - s_n\| = 0$.*

Demostración. Como $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$, existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|f_n\| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así $\|s_n\| \leq \|f_n - s_n\| + \|f_n\| \leq 2\|f_n\| \leq 2c$, para todo n. Note que

$$s_n \in S \cap \{g \in X : \|g\| \leq 2c\} =: U, \quad n \in \mathbb{N},$$

y U es un conjunto compacto. Entonces, existe una subsucesión de $\{s_n\}$, la cual converge a algún $s^* \in S$. Por el Teorema, 1.5.2, $s^* = s$. Puesto que esto es válido para cualquier subsucesión convergente, se sigue que $\lim_{n\to\infty} \|s - s_n\| = 0$. □

Definición 1.5.4. *Sea $S \subset X$ un conjunto de existencia para X. Entonces S se dice un conjunto de unicidad, si $P_S(f)$ es un conjunto unitario para todo $f \in X$.*

Como una consecuencia inmediata de la Proposición 1.5.3 tenemos:

Corolario 1.5.5. *Sea $S \subset X$ un subespacio de dimensión finita tal que S es un conjunto de unicidad. Entonces el operador univaluado $P_S(.)$ es continuo sobre X.*

2

Mejor Aproximación en la Norma Uniforme

2.1. Introducción

La mejor aproximación uniforme a una función es en cierto sentido más severa que la aproximación por mínimos cuadrados ya que esta proximidad debe mantenerse en todos los puntos del intervalo y una alteración de la función en un entorno de un punto la alejaría notablemente de su mejor aproximación.

Antes de entrar en el análisis de la mejor aproximación uniforme en un espacio de polinomios de grado fijo, es importante destacar que para toda función continua existe un polinomio tan próximo a la función como se desee, en el sentido uniforme. Se describe este resultado, de modo más preciso, en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Weierstrass). *Si f es una función continua en un intervalo cerrado y acotado I, para todo número real positivo ϵ existe un polinomio P tal que*

$$\|f - P\| < \epsilon,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Chebyshev (o uniforme) sobre I.

2.2. Teorema de Alternancia de Chebyshev

El teorema de Weierstrass pone de manifiesto que la estrategia de aproximar una función continua por un ponimonio podría ser mejorada buscando la mejor aproximación a la función dentro del espacio de los polinomios de grado fijo.

El siguiente resultado permite caracterizar el mejor aproximante uniforme desde Π^n a una función $f \in C(I)$, $I = [a, b]$. Para probar este teorema, Chebyshev analizó el comportamiento de la función error

$$E(x) := f(x) - P^*(x).$$

Él mostró que existen muchos puntos donde E alternadamente toma los valores $\pm\|E\|$.

Ejercicio 2.2.1. *Sea $I = [a, b]$. Si $g \in C(I)$, entonces $x_0 \in I$ tal que $|g(x_0)| = \|g\|$ y $|g(x)| < \|g\|$ si $x < x_0$.*

Teorema 2.2.2. *(Chebyshev)* *Sea $I = [a, b]$. Si $f \in C(I)$ y P^* es una mejor aproximación desde Π^n, entonces existen puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ en I, y un valor $\eta = \pm 1$ tal que*

$$E(x_i) = (-1)^i \eta \|E\|, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Así este teorema muestra que existen al menos $n+2$ *puntos donde el error* E *alternadamente toma su máximo* $\|E\|$ *y su mínimo* $-\|E\|$.

Demostración. Por el Ejercicio 2.2.1 existe x_0, el primer punto desde la izquierda sobre I, donde $|E(x_0)| = \|E\|$. Se asume $E(x_0) > 0$ (la prueba para $E(x_0) < 0$ es similar). Por ende $E(x) > -\|E\|$ para todo $x \in [a, x_0]$.

Si no existe un punto $x \in (x_0, b]$ tal que $E(x) = -E(x_0) = -\|E\|$, entonces $E(x) > -\|E\|$ para todo $x \in I$. Sea $c > 0$ tal que $2c = \min_{x\in I} E(x) + \|E\|$. Por lo tanto, $2c \leq E(x) + \|E\|$ para todo $x \in I$, y en consecuencia,

$$-\|E\| < c - \|E\| \leq E(x) - c < \|E\|, \quad \text{para todo} \quad x \in I,$$

es decir, $\|E - c\| < \|E\|$. Así $P^* + c$ produce un error menor que P^*, lo cual es una contradicción.

Sea ahora x_1 el primer punto en el intervalo $(x_0, b]$ tal que $E(x_1) = -E(x_0)$.

Continuando de esta manera, se puede construir una sucesión de puntos $x_1, \ldots, x_m$ tal que x_i es el primer punto en el intervalo $(x_{i-1}, b]$ donde $E(x_i) = -E(x_{i-1})$, $i = 1, \ldots, m$. De aquí,

$$E(x_i) = (-1)^i \|E\|, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Veamos que $m > n$.

Supongamos que $m \leq n$. y sea $0 \leq i \leq m-1$. Como E es continua en I, por el Teorema del Valor Intermedio existe $y \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $E(y) = 0$. Sean $A_i = \{x \in (x_i, x_{i+1}) : E(x) = 0\}$, y $\xi_{i+1} = \sup(A_i)$. Dado que E es continua, $\xi_{i+1} \in A_i$. Esto implica que existen puntos $\xi_1, \ldots, \xi_m$ con

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \ldots < x_m \tag{2.1}$$

tal que el intervalo cerrado $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ no contiene puntos x con $E(x) = -E(x_i)$ y $E(\xi_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. [1]

[1] Si $E(x) = -E(x_i)$ para algún $x \in (\xi_i, \xi_{i+1})$, entonces: (a) $x \in (\xi_i, x_i)$ o (b) $x \in (x_i, \xi_{i+1})$. En el primer caso, existe $y \in (\xi_i, x_i)$ tal que $E(y) = 0$, y por ende $y \leq \xi_i$ pues $y \in (x_i, x_{i-1})$, una contradicción. Si pasa (b), $x_{i+1} \leq x < \xi_{i+1}$, lo cual contradice (2.1).

Ahora para una elección conveniente de γ, el polinomio

$$P(x) = \gamma(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$$

es de grado menor o igual que n y coincide con el signo de $E(x_i)$ en cada intervalo (ξ_i, ξ_{i+1}). Si $E(x_i) > 0$,

$$E(x) > -E(x_i) = -\|E\|, \quad \text{para todo} \quad x \in [\xi_i, \xi_{i+1}].$$

Sean $\alpha_i > 0$ tal que $2\alpha_i = \min_{x\in[\xi_i,\xi_{i+1}]} E(x) + \|E\|$ y $0 < \eta < \alpha_i \left(\max_{x\in[\xi_i,\xi_{i+1}]} |P(x)| \right)^{-1} =: \eta_i$. Como $P(x) > 0$ en (ξ_i, ξ_{i+1}), para todo $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ se satisface

$$-\|E\| < \alpha_i - \|E\| \leq E(x) - \alpha_i < E(x) - \eta P(x) < \|E\|,$$

y por lo tanto

$$|E(x) - \eta P(x)| < \|E\|, \quad \text{para todo} \quad x \in [\xi_i, \xi_{i+1}].$$

Lo mismo vale cuando $E(x_i) < 0$ y también sobre los intervalos extremos. Como hay sólo un número finito de intervalos podemos elegir un $\eta > 0$, suficientemente pequeño, y obtener

$$\|E - \eta P\| < \|E\|.$$

Como $P^* + \eta P \in \Pi^n$ produce un error menor que P^*, resulta que P^* no es un mejor aproximante, una contradicción. □

Ejemplo 2.2.3. *El polinomio $P^*(x) = \frac{3}{4}x$ es el mejor aproximante a $f(x) = x^3$ desde Π^2 en el intervalo $[-1, 1]$. En efecto, la diferencia $f - P^*$ alterna entre el máximo valor absoluto $\|f - P^*\| = \frac{1}{4}$ y su opuesto $-\frac{1}{4}$ en 4 puntos:*

$$x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2} \text{ y } x_3 = 1.$$

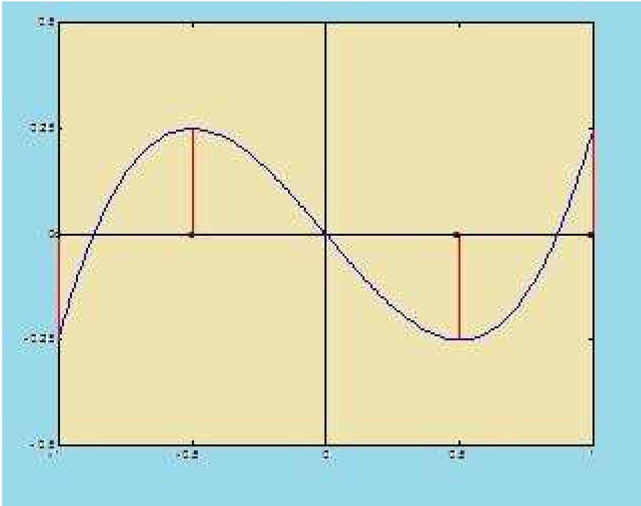

Figura 2.1: Gráfica de $E(x) = f(x) - P^*(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$.

Ejercicio 2.2.4. *Sean* $x \in I = [a, b]$ *y* $f, g \in C(I)$ *tal que* $\|f\| = \|g\| = a$. *Probar que si* $\frac{f(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} = \pm a$, *entonces* $f(x) = g(x)$.

Una primera consecuencia del Teorema de Alternancia de Chebyshev es la unicidad del mejor aproximante.

Teorema 2.2.5. *Sea* $I = [a, b]$. *Si* $f \in C(I)$, *entonces* f *tiene un único mejor aproximante* $P^* \in \Pi^n$.

Demostración. Si P_1 y P_2 son dos mejores aproximantes de f desde Π^n entonces también lo es

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2},$$

ya que como observamos el conjunto de mejores aproximantes es convexo.

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ puntos de alternación para $f - P$ entonces

$$\frac{f(x_i) - P_1(x_i)}{2} + \frac{f(x_i) - P_2(x_i)}{2} = f(x_i) - P(x_i) = \pm\|E\|. \tag{2.2}$$

Como $\|f - P_1\| = \|E\|$ y $\|f - P_2\| = \|E\|$, por el Ejercicio 2.2.4 se tiene que

$$f(x_i) - P_1(x_i) = f(x_i) - P_2(x_i),$$

es decir,

$$P_1(x_i) = P_2(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Esto significa que el polinomio $P_1 - P_2$ de grado menor o igual que n tiene $n+2$ ceros y de allí $P_1 = P_2$. □

Ejercicio 2.2.6. *Probar que si $|a| < |b|$ entonces $sgn(b-a) = sgn(b)$.*

Teorema 2.2.7. *Sea $I = [a, b]$. Si $f \in C(I)$ y $P \in \Pi^n$ son tales que $f - P$ alternadamente toma los valores $\pm M$ al menos $n+2$ veces con $M = \|f - P\|$, entonces P es el mejor aproximante de f desde Π^n y $M = E_n(f)$.*

Demostración. Sean x_i, $i = 0, \ldots, n+1$, $n+2$ puntos de alternancia de $f - P$. Si P no es el mejor aproximante, existe otro polinomio Q tal que $\|f - Q\| < M$, entonces

$$|(f-Q)(x_i)| \leq \|f - Q\| < M = |(f-P)(x_i)|.$$

En consecuencia, por el Ejercicio 2.2.6, $Q - P$ tiene el mismo signo que $f - P$ en cada uno de los x_i. Luego $Q - P$ tiene al menos $n+1$ ceros y en consecuencia $Q = P$, una contradicción. □

2.3. Algoritmo de Remez

Una segunda consecuencia del Teorema de Alternancia de Chebushev, es el procedimiento para construir el mejor aproximante en la norma uniforme, y que se conoce como Algoritmo de Remez.

Este algoritmo genera:

(a) Una sucesión $P_n^{(k)}$ que converge al mejor aproximante P^*;

(b) Una sucesión $X^{(k)}$ que converge a X^* sobre el cual $f - P^*$ es oscilante.

Algoritmo

Procedimiento:

(1) Seleccione un conjunto $X^{(0)}$ de $n+2$ puntos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ en $I = [a, b]$ arbitrariamente.

(2) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$f(x_i) - P_n^{(k)}(x_i) = (-1)^i E \tag{2.3}$$

para $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$. Si se escoge una base de Π^n, las $n+1$ componentes del polinomio en esa base y el valor de E son las $n+2$ incógnitas de un sistema lineal.

(3) Encuentre el conjunto $X^{(k+1)}$ de puntos en los que la función $\left|f - P_n^{(k)}\right|$ alcanza su máximo, incluidos ambos extremos de intervalo. En el caso de que sobre un punto, debe dejarse en el conjunto aquel extremo de intervalo que muestre mayor error y mantenga la alternancia de signos. El otro extremo debe ser eliminado de la lista.

(4) Este algoritmo finaliza cuando la convergencia de $X^{(k)}$ se logra ó bien cuando el error obtenido en la resolución del sistema lineal alcanza un valor de tolerancia previamente establecido.

Observación 2.3.1. *(a) Con este algoritmo, para muchas funciones la convergencia es cuadrática. Esto significa que la sucesión de polinomios $\{P_n^{(k)}\}$ converge uniformemente al mejor aproximante P^* de acuerdo a una desigualdad de la forma*

$$\|P_n^{(k)} - P^*\| \leq A\theta^{2k},$$

donde $0 < \theta < 1$ y $A > 0$ (Se referencia [2] para justificar esta afirmación);

(b) Si $I = [-1, 1]$, una buena elección de los puntos de partida es la de las raíces del polinomio de Chebyshev de grado $n+2$.

Ejemplo 2.3.2. *Estime el mejor aproximante en la norma uniforme de la función* $f(x) = \cos(x) + \sqrt{x}$ *desde* Π^1 *en el intervalo* $[0{,}5, 3]$*, usando el Algoritmo de Remez.*

Solución. Puesto que $n = 1$ se escoge como

$$X^{(0)} = \{0{,}5, 1{,}75, 3\}.$$

El polinomio buscado en la primera iteración se expresa como

$$P^{(0)}(x) = a_0 + a_1 x$$

en la base de los monomios $\{1, x\}$. El sistema lineal (2.3) se convierte en

$$\begin{array}{ccccccc} f(0{,}5) & - & a_0 & - & a_1 0{,}5 & = & E \\ f(1{,}75) & - & a_0 & - & a_1 1{,}75 & = & -E \\ f(3) & - & a_0 & - & a_1 3 & = & E. \end{array}$$

Si se resuelve el sistema, se obtiene que el polinomio correspondiente a la primera iteración de Remez es

$$P^{(0)}(x) = 1{,}7438 - 0{,}33705x \quad \text{y} \quad E = 0{,}0093721.$$

Para proceder a la fase de intercambio, se calcula los extremos de $f - P^{(0)}$ que corresponden a $x = 0{,}99442$ y $x = 2{,}4230$. De acuerdo con el Teorema de Alternacia de Chebyshev se necesitan 3 puntos en los que la función de error tome alternativamente sus valores extremos. De los extremos del intervalo, se elige $x = 3$ puesto que la alternancia de signos se cumple de acuerdo a

$$\begin{array}{ccccc} f(0{,}5) & - & P^{(0)}(0{,}5) & > & 0 \\ f(0{,}99442) & - & P^{(0)}(0{,}99442) & > & 0 \\ f(2{,}4230) & - & P^{(0)}(2{,}4230) & < & 0 \\ f(3) & - & P^{(0)}(3) & > & 0 \end{array}.$$

Ahora

$$X^{(1)} = \{0, 99442, 2, 4230, 3\},$$

entonces luego de acomodar los términos en forma conveniente, debe resolverse el sistema:

$$\begin{array}{rcccccl} f(0{,}99442) & - & a_0 & - & a_1 0{,}99442 & = & E \\ f(2{,}4230) & - & a_0 & - & a_1 2{,}4230 & = & -E, \\ f(3) & - & a_0 & - & a_1 3 & = & E \end{array}$$

cuya solución es

$$P^{(1)}(x) = 1{,}8547 - 0{,}39895x \quad \text{y} \quad E = 0{,}084194.$$

De los extremos del intervalo, se elige $x = 3$ con el mismo criterio que en la iteración anterior.

Siguiendo de forma similar a las dos primeras iteraciones se obtiene

$$X^{(2)} = \{1{,}0791, 2{,}3260, 3\} \quad \text{y} \quad X^{(3)} = \{1{,}0791, 2{,}3260, 3\},$$

con lo que el algoritmo termina y el mejor approximante es $P^{*}(x) = 1{,}8567 - 0{,}40026x$. $\square$

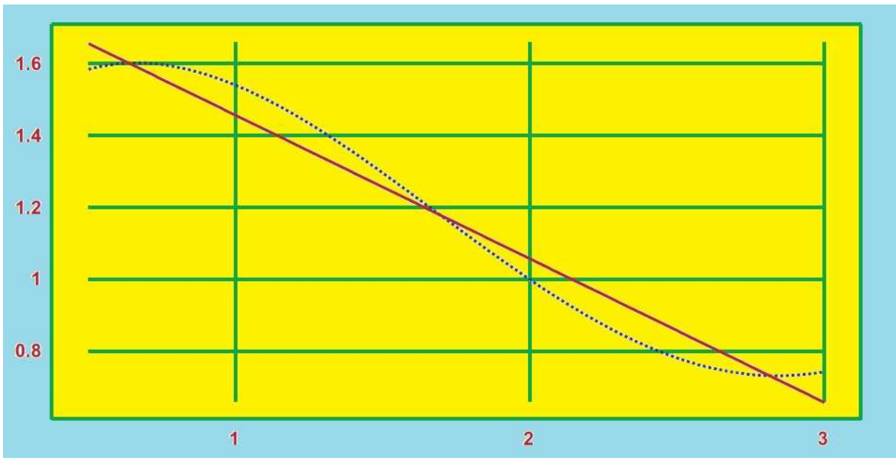

Figura 2.2: Gráfica de $f(x) = \cos(x) + \sqrt{x}$ y su mejor aproximante P^{*}.

Ejemplo 2.3.3. *Muestre la convergencia del Algoritmo de Remez de la función* $f(x) = \cos(x) + \sqrt{x}$, *al mejor aproximante en la norma uniforme desde* Π^3 *en el*

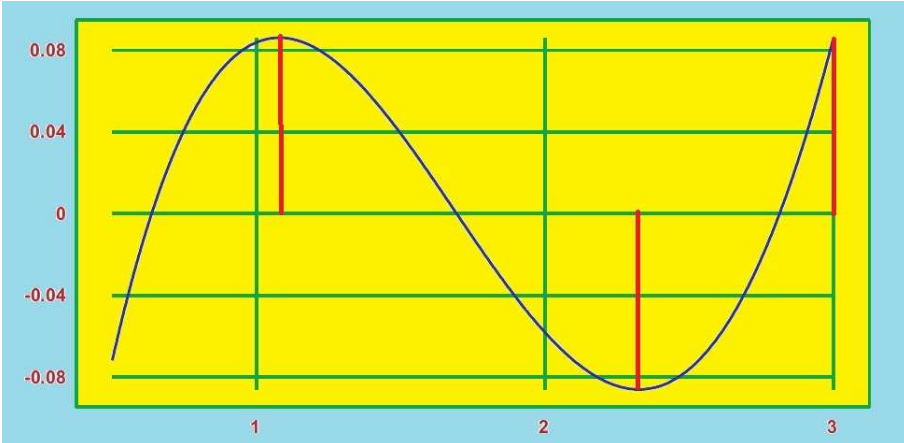

Figura 2.3: Gráfica de $E(x) = f(x) - P^*(x)\cos(x) + \sqrt{x} - 1{,}8567 + 0{,}40026x$.

intervalo $[0{,}5, 3]$.

Solución. Para ello se realizarán 5 iteraciones del algoritmo. Sea

$$X^{(0)} = \{0{,}5, 1{,}125, 1{,}75, 2{,}375, 3\},$$

entonces

$$X^{(1)} = \{0{,}5, 0{,}87248, 1{,}8073, 2{,}6718, 3\}$$

$$X^{(2)} = \{0{,}5, 0{,}88988, 1{,}8535, 2{,}6811, 3\}$$

$$X^{(3)} = \{0{,}5, 0{,}89000, 1{,}8504, 2{,}6792, 3\}$$

$$X^{(4)} = \{0{,}5, 0{,}88997, 1{,}8499, 2{,}6810, 3\}$$

$$X^{(5)} = \{0{,}5, 0{,}88861, 1{,}8496, 2{,}6802, 3\}.$$

La sucesión de polinomios $P^{(k)}$, $0 \leq k \leq 5$, es la siguiente

$$P^{(0)}(x) = 0{,}17041x^3 - 0{,}88268x^2 + 0{,}90045x + 1{,}3272$$

$$P^{(1)}(x) = 0{,}16892x^3 - 0{,}87469x^2 + 0{,}90848x + 1{,}3329$$

$$P^{(2)}(x) = 0{,}16904x^3 - 0{,}87526x^2 + 0{,}90920x + 1{,}3326$$

$$P^{(3)}(x) = 0{,}16900x^3 - 0{,}87511x^2 + 0{,}90903x + 1{,}3327$$

$$P^{(4)}(x) = 0{,}16905x^3 - 0{,}87538x^2 + 0{,}90950x + 1{,}3325$$

$$P^{(5)}(x) = 0{,}16906x^3 - 0{,}87541x^2 + 0{,}90945x + 1{,}3325.$$

Sin embargo, con una partición de 10000 puntos en $[0, 5, 3]$, el error de aproximación es

$$E^{(0)} = 7{,}30 \times 10^{-3}$$

$$E^{(1)} = 5, 20 \times 10^{-3}$$

$$E^{(2)} = 5, 20 \times 10^{-3}$$

$$E^{(3)} = 5, 20 \times 10^{-3}$$

$$E^{(4)} = 5, 10 \times 10^{-3}$$

$$E^{(5)} = 5, 24 \times 10^{-3},$$

lo que sugiere que tal vez debería haberse finalizado el algoritmo en la cuarta iteración. $\square$

Bibliografía

[1] V. Barbu, Th. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Mathematics and its applications (D. Reidel Publishing Company). East European series, Editura Academiei, 1978

[2] H. Brézis, *Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[3] A. M. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, Lecture Notes in Mathematics Volume 659, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[4] G. Celant, M.Broniatowski, *Interpolation and extrapolation optimal designs. 1, Polynomial regression and approximation theory*, John Wiley & Sons, USA, 2016.

[5] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, AMS Chelsea Publishing Company, New York, 1982.

[6] G. Corach, E. Andruchov, *Notas de Análisis Funcional*, Universidad de Buenos Aires, FCEyN, Departamento de Matemáticas, Monografía, Buenos Aires, 1997, http://glaroton.ungs.edu.ar/bsv.pdf.

[7] R. B Holmes, *A Course on Optimization and Best Approximation*, Lecture Notes in Mathematics Volume 257, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[8] A. Iske, *Approximation Theory and Algorithms for Data Analysis*, Texts in Applied Mathematics Volume 68, Springer, Germany, 2018.

[9] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Clasical Banach Spaces II. Function Spaces*, Volumen 97 de Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[10] G. G. Lorentz, *Approximation of functions*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[11] C. Moreno González, *Introducción al cálculo numérico*, UNED, Madrid, 2014.

[12] A. Pinkus, *On L^1-Approximation*, Volumen 93 de Cambridge tracts in mathematics / B.Bollobas, H. Halberstma & C.T.C. Wall, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[13] J. R. Rice, *The Approximation of Functions*, Volumen 1 Addison-Wesley series in computer science and information processing, Addison-Wesley publishing, Massachusetts, 1969.

[14] W. Rudin, *Análisis Funcional*, Editorial Reverté, Barcelona, 2002.

[15] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Publishing House of the Academy of the Socialist Republic of Romania, Bucharest, 1970.